



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

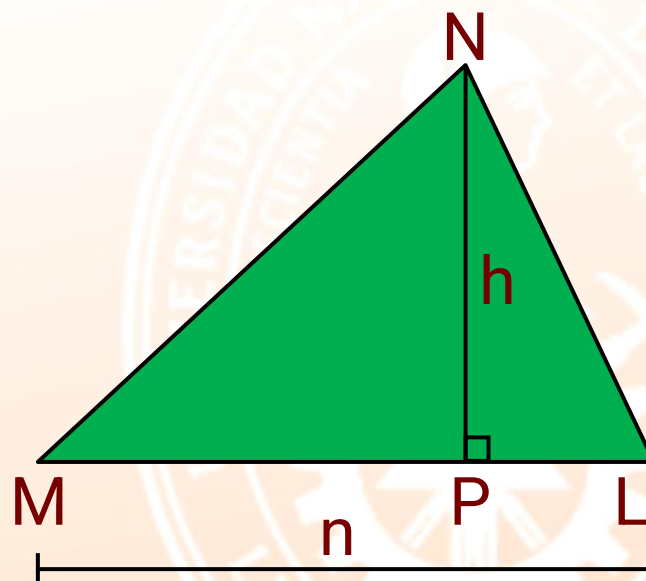
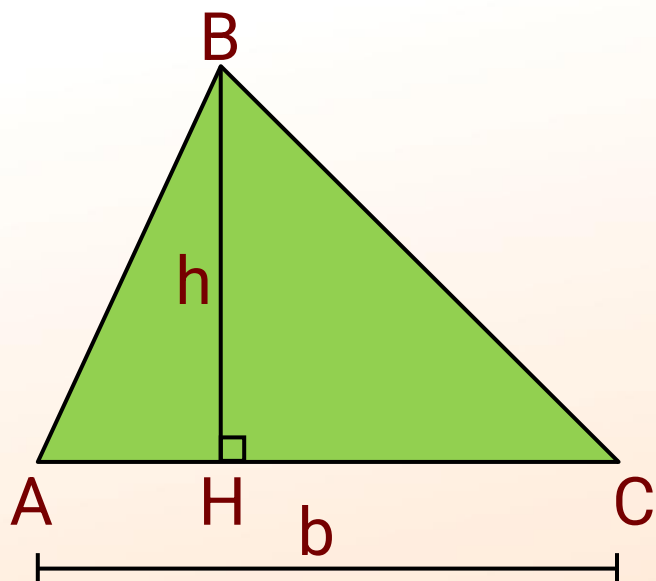
**RELACION DE AREAS EN
REGIONES TRIANGULARES**

**CICLO
PRE
2024-1**



TEOREMA

Si dos triángulos tienen un par de alturas congruentes, entonces las áreas de sus regiones triangulares son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes a las alturas.

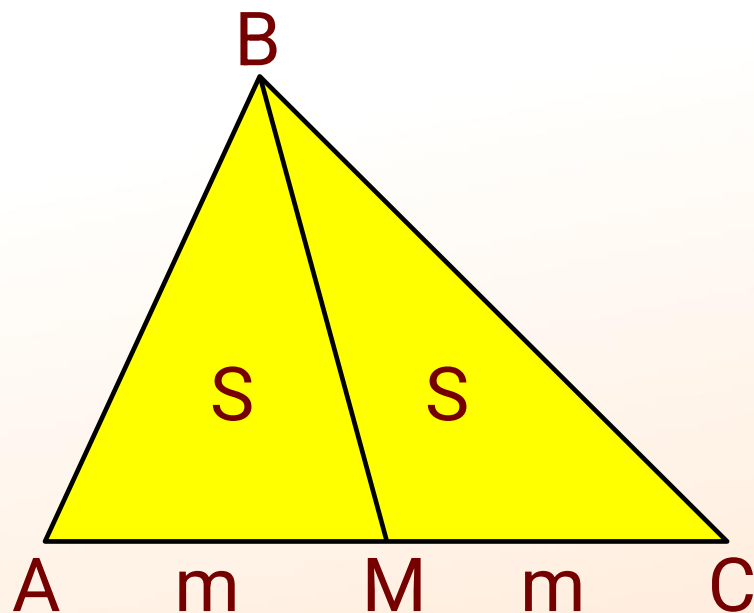


Si $BH = NP$, entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{b}{n}$$

COROLARIO

En un triángulo, al trazar una mediana, se determinan dos regiones triangulares equivalentes.



En el $\triangle ABC$, si $\overline{BM}$ es mediana, entonces

$$S_{ABM} = S_{MBC} = S$$

PROBLEMA 01

En un triángulo ABC, la mediana $\overline{CM}$ y altura $\overline{BH}$ se intersecan en el punto D, tal que $HC = 2(AH)$. Calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares ABC y BDC.

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

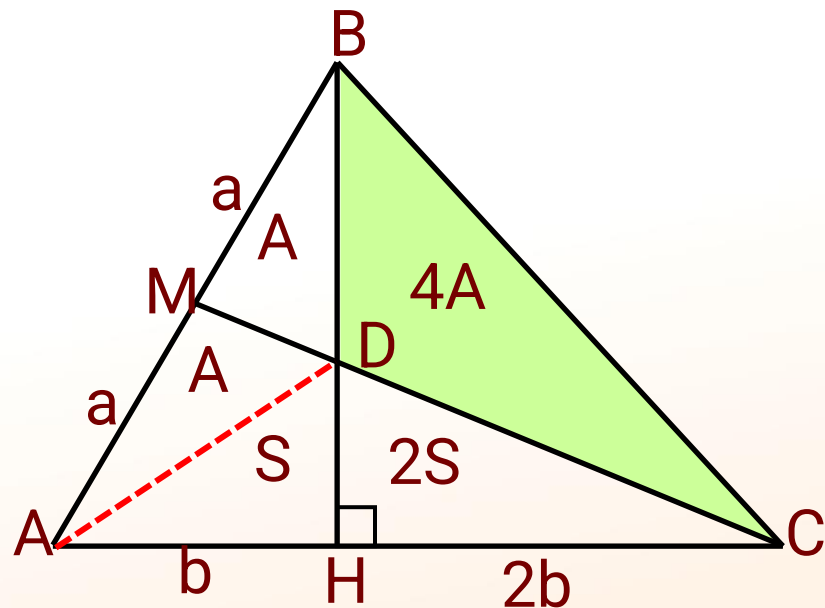
C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN 01

En un triángulo ABC, la mediana $\overline{CM}$ y altura $\overline{BH}$ se intersectan en el punto D, tal que $HC = 2(AH)$. Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares ABC y BDC.



Calcule $\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}$

Por relación de áreas

$$\triangle ADC: S_{DHC} = 2(S_{AHD}) = 2S$$

$$\triangle ABC: S_{BHC} = 2(S_{AHB})$$

$$S_{BDC} = 4A$$

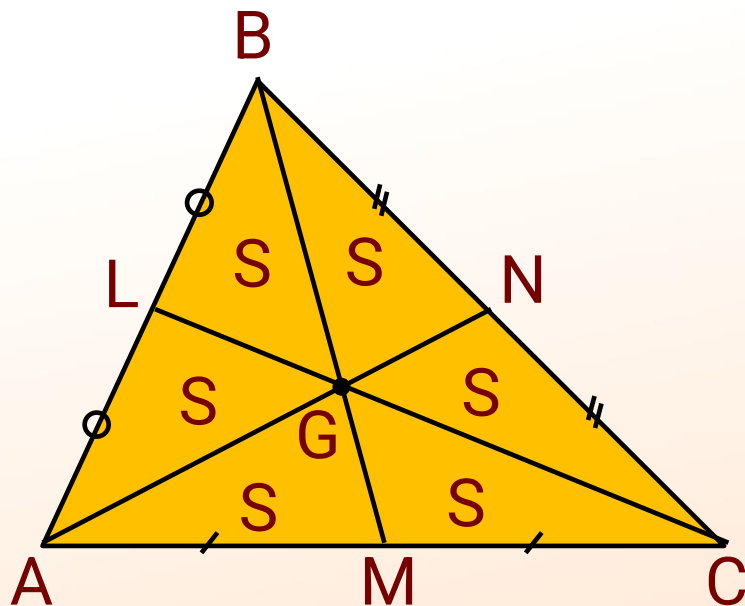
$$S_{ABC} = 2(S_{MBC}) = 2(5A) = 10A$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{10A}{4A} = \frac{5}{2}$$

Clave: E

COROLARIO

En un triángulo, al trazar las tres medianas, se determinan seis regiones triangulares equivalentes.

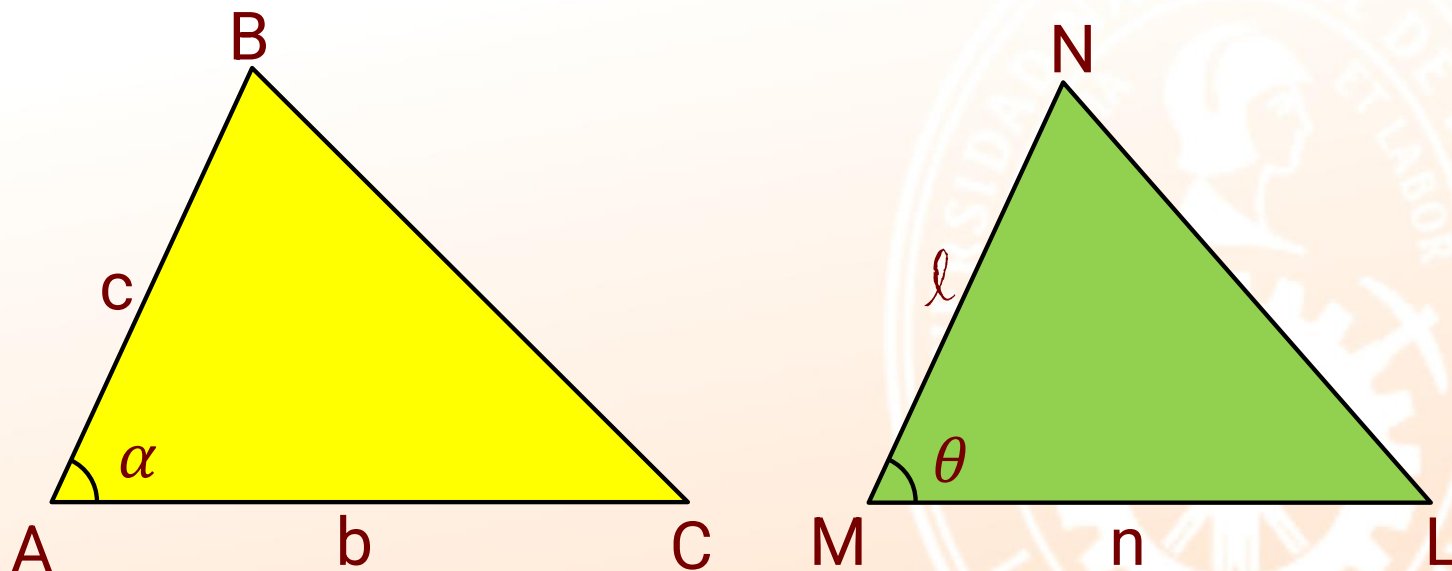


Si $\overline{AN}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CL}$ son medianas, entonces

$$S_{AGL} = S_{LGB} = S_{BGN} = S_{NGC} = S_{CGM} = S_{MGA} = S$$

TEOREMA

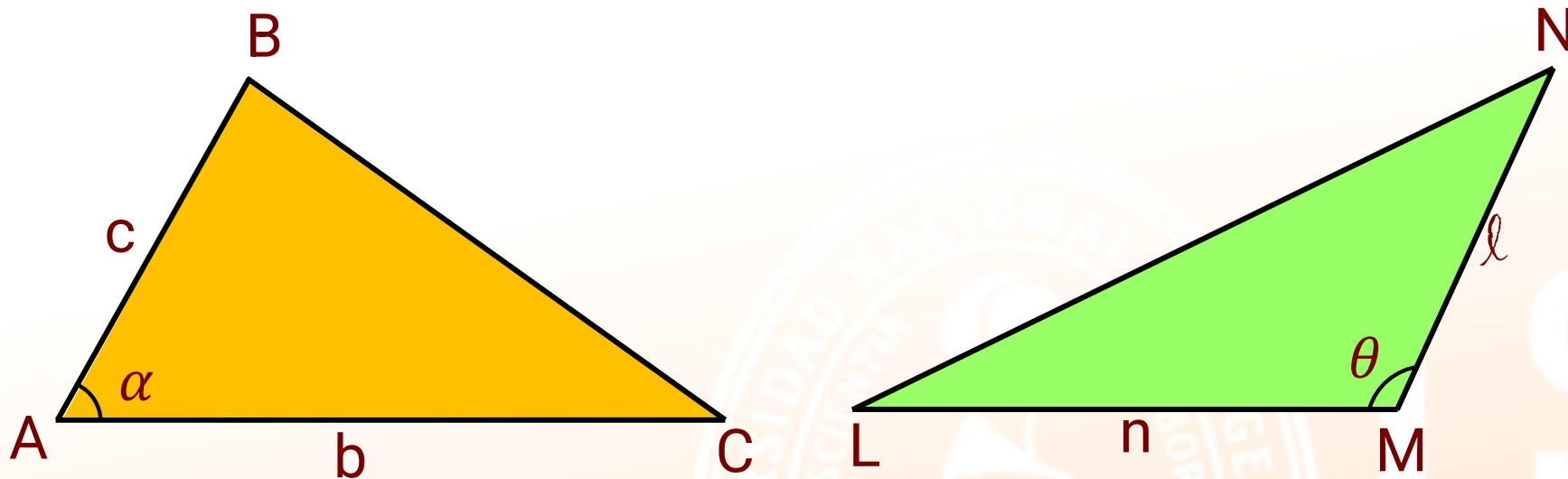
Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes o suplementarios, entonces las áreas de sus respectivas regiones son proporcionales al producto de las longitudes de los lados que determinan dichos ángulos.



Si $\alpha = \theta$, entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{b c}{n l}$$

TEOREMA



Si $\alpha + \theta = 180$, entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{b \ c}{n \ \ell}$$

PROBLEMA 02

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O , se ubican los puntos consecutivos P , Q y T (P en $\widehat{AQ}$), $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ intersecan a $\overline{AT}$ en los puntos C y D . Si $m\widehat{PQ} = m\widehat{TB}$ y las áreas de las regiones triangulares ACO y ODT son S_1 y S_2 , entonces el área de la región cuadrangular $PQDC$ es

A) $2S_1 + S_2$

B) $S_1 + 2S_2$

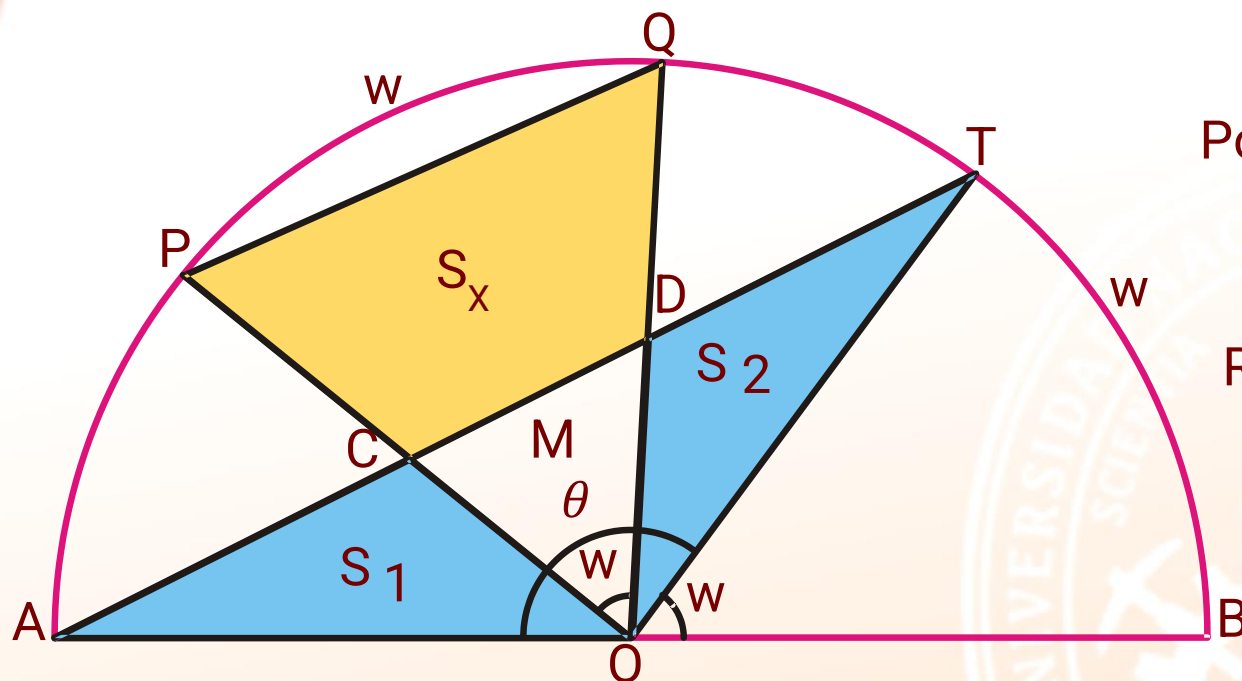
C) $2(S_1 + S_2)$

D) $S_1 + S_2$

E) $S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1)(S_2)}$

RESOLUCIÓN 02

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O se ubican los puntos consecutivos P, Q y T (P en $\widehat{AQ}$), $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ intersecan a $\overline{AT}$ en los puntos C y D . Si $m\widehat{PQ} = m\widehat{TB}$ y las áreas de las regiones triangulares ACO y ODT son S_1 y S_2 , entonces el área de la región cuadrangular $PQDC$ es



$$A_{PQDC} = S_x$$

Por ángulo central: $m\angle POQ = m\angle TOB = w$

$$\text{Entonces: } w + \theta = 180$$

Relación de áreas (ángulos suplementarios)

$$\frac{S_x + M}{S_1 + M + S_2} = \frac{(OP)(OQ)}{(OA)(OT)}$$

$$\frac{S_x + M}{S_1 + M + S_2} = \frac{(R)(R)}{(R)(R)} = 1$$

$$S_x + M = S_1 + M + S_2$$

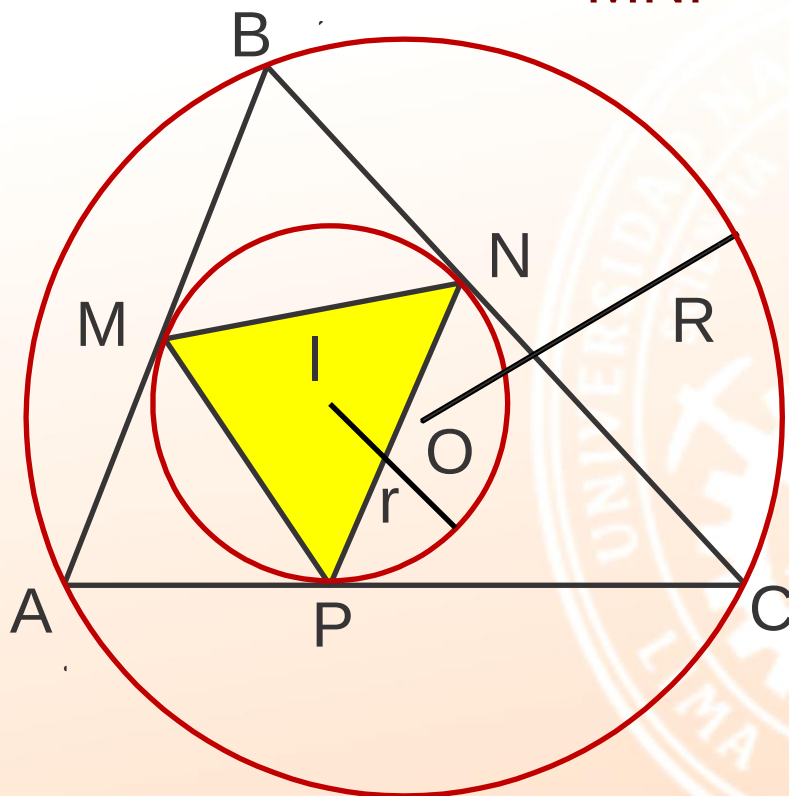
$$\therefore S_x = S_1 + S_2$$

Clave: D

PROBLEMA 03

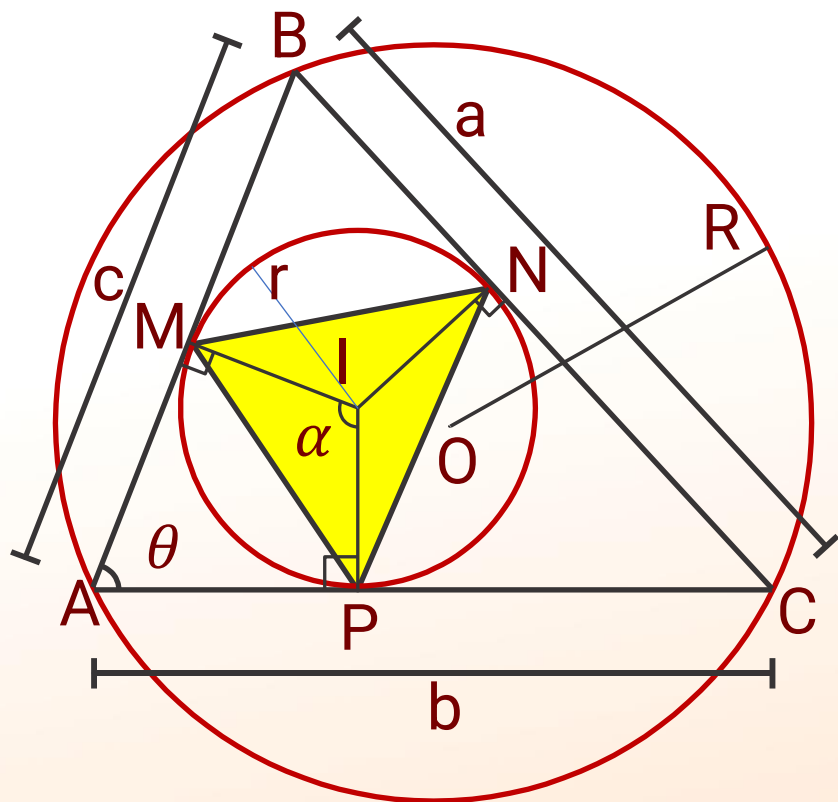
En la figura, r y R son las longitudes del inradio y el circunradio del

triángulo ABC. Demuestre que: $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2R}{r}$



ce
pre
UNI

DEMOSTRACIÓN



Demuestre: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{2R}{r}$

$$\frac{S_{\Delta MIP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r \cdot r}{b \cdot c} ; \frac{S_{\Delta MIN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r \cdot r}{a \cdot c} ; \frac{S_{\Delta NIP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r \cdot r}{a \cdot b}$$

Sumando se tiene: $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = r^2 \left(\frac{2p}{abc} \right)$

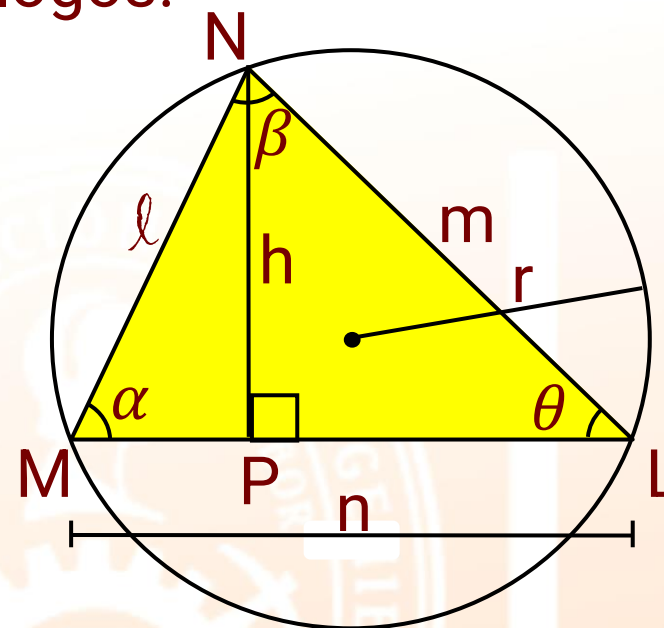
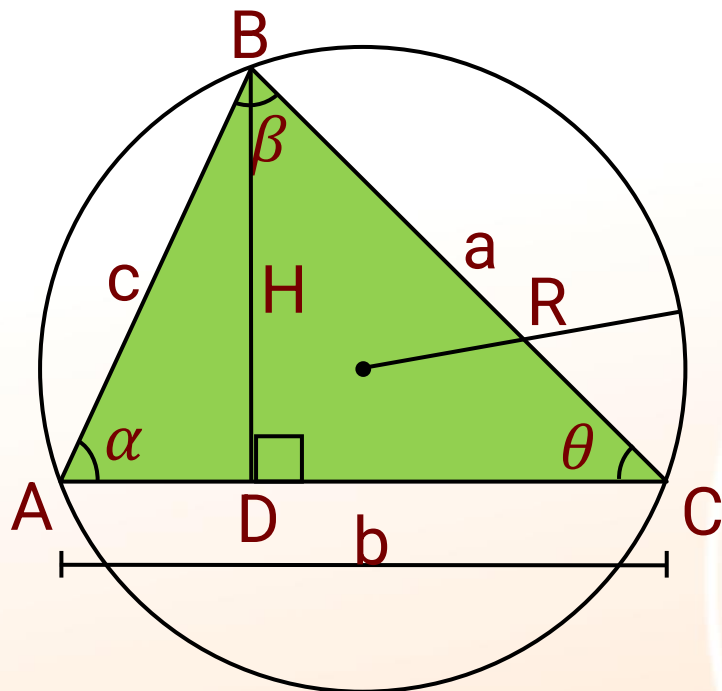
Dando forma se tiene: $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2r}{4R} \left(\frac{pr}{\frac{abc}{4R}} \right)$

Invertimos la expresión: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{2R}{r}$

LQQD

TEOREMA

Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de las áreas de sus respectivas regiones, son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.

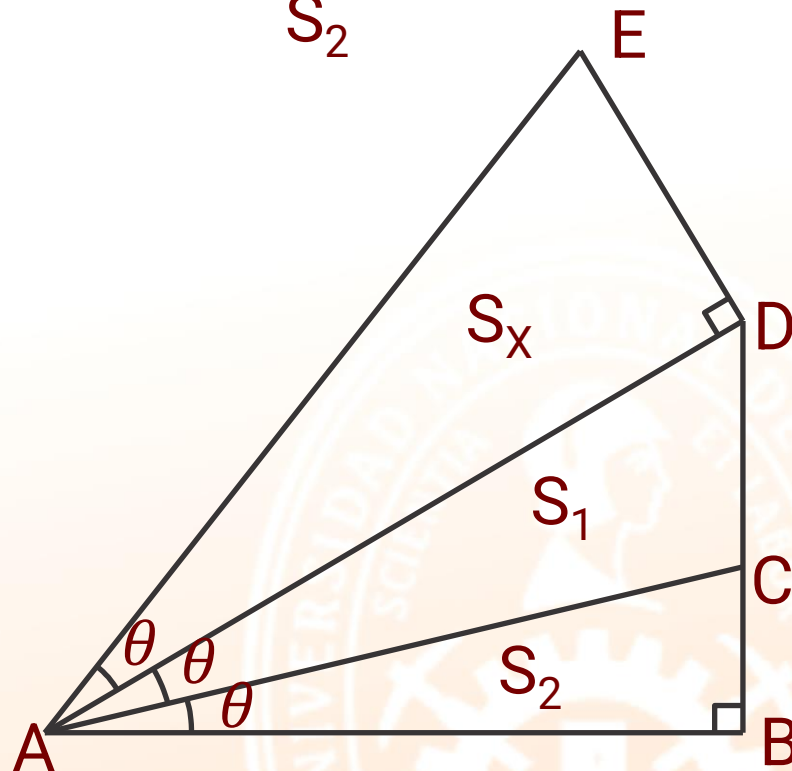


Si $\triangle ABC \sim \triangle MNL$, entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{l^2} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2} = k^2$$

PROBLEMA 04

En la figura, calcule el área S_x en función de las áreas S_1 y S_2



A) $\frac{S_1^2}{S_2}$

B) $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$

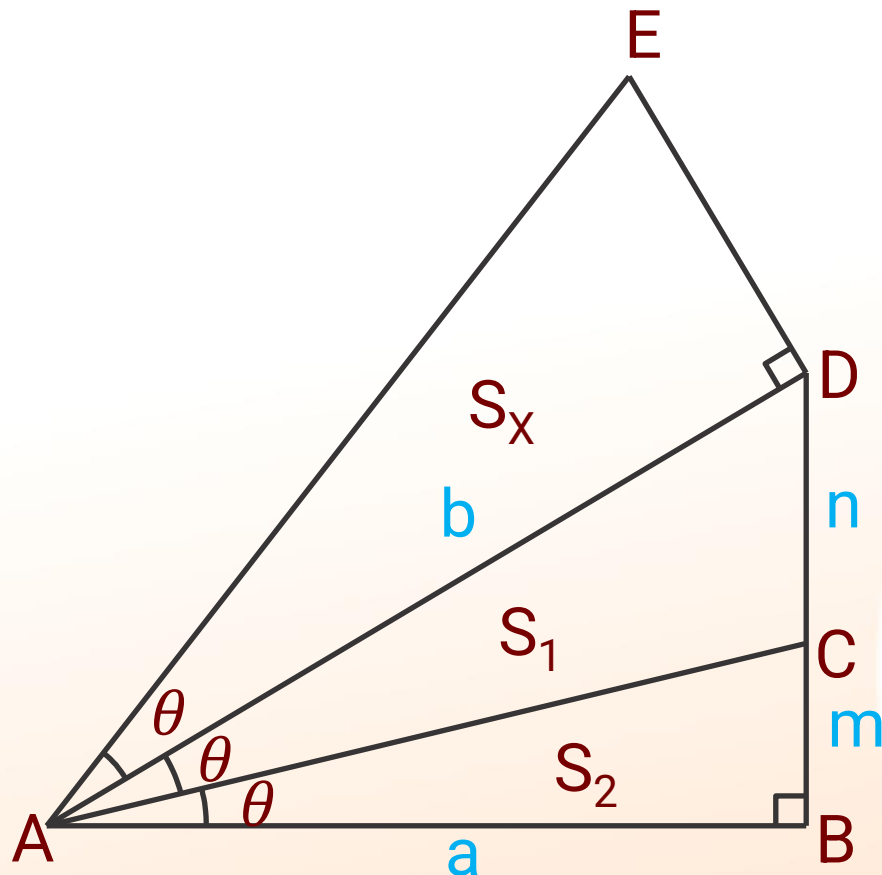
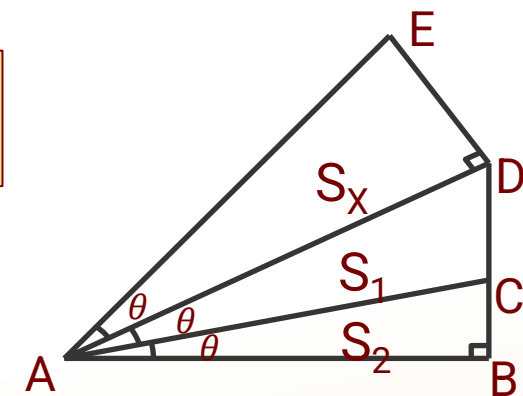
C) $\sqrt{S_1 S_2}$

D) $\frac{S_2^2}{S_1}$

E) $S_1 + S_2$

RESOLUCIÓN 04

En la figura, calcule el área S_x en función de las áreas S_1 y S_2



Halle S_x

$$\triangle AED \sim \triangle ACB \text{ (AAA)} \quad \frac{S_x}{S_2} = \frac{b^2}{a^2} \quad \dots (1)$$

$$\triangle ABD, \text{ t. de la bisectriz interior} \quad \frac{b}{a} = \frac{n}{m}$$

$$\triangle ABD, \text{ por relación de áreas} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{n}{m}$$

$$\text{Luego} \quad \frac{b}{a} = \frac{S_1}{S_2} \quad \dots (2)$$

$$(2) \text{ en } (1): S_x = \frac{S_1^2}{S_2}$$

Clave: A

PROBLEMA 05

Una región triangular ABC de centroide G tiene $k \text{ u}^2$ de área. Por G , se traza una paralela a $\overline{AC}$, que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Halle el área de la región $APQC$.

A) $\frac{k}{6}$

D) $\frac{3k}{7}$

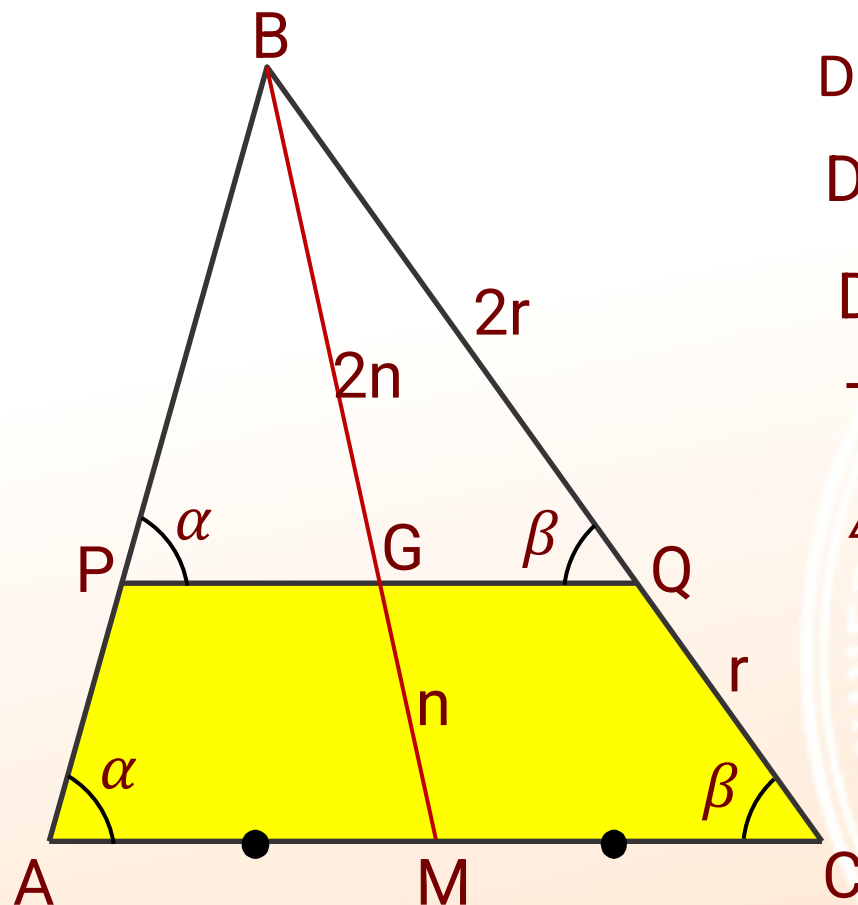
B) $\frac{k}{5}$

E) $\frac{5k}{9}$

C) $\frac{2k}{5}$

RESOLUCIÓN 05

Una región triangular ABC de centroide G, tiene $k \text{ u}^2$ de área. Por G se traza una paralela a $\overline{AC}$, que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Halle el área de la región APQC.



Dato: $S_{ABC} = k$ Calcule S_{APQC}

Dato G es centroide: $BG = 2n$, $GM = n$

Dato $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$:

T. de Thales: $BQ = 2r$, $QR = r$

$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ (AA)

$$\frac{S_{ABC}}{(3r)^2} = \frac{S_{PBQ}}{(2r)^2} = \frac{S_{ABC} - S_{PBQ}}{(3r)^2 - (2r)^2}$$

$$\frac{k}{9r^2} = \frac{S_{APQC}}{5r^2}$$

$$\therefore S_{APQC} = \frac{5k}{9}$$

Clave: E

PROBLEMA 06

Sea el triángulo $\overline{ABC}$, los puntos R , P y Q pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{PQ}$ son paralelos a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si las áreas de las regiones triangulares RBP y QPC son M y N , entonces el área de la región triangular ABC es

A) $(M + N)^2$

B) $(\sqrt{M} + \sqrt{N})^2$

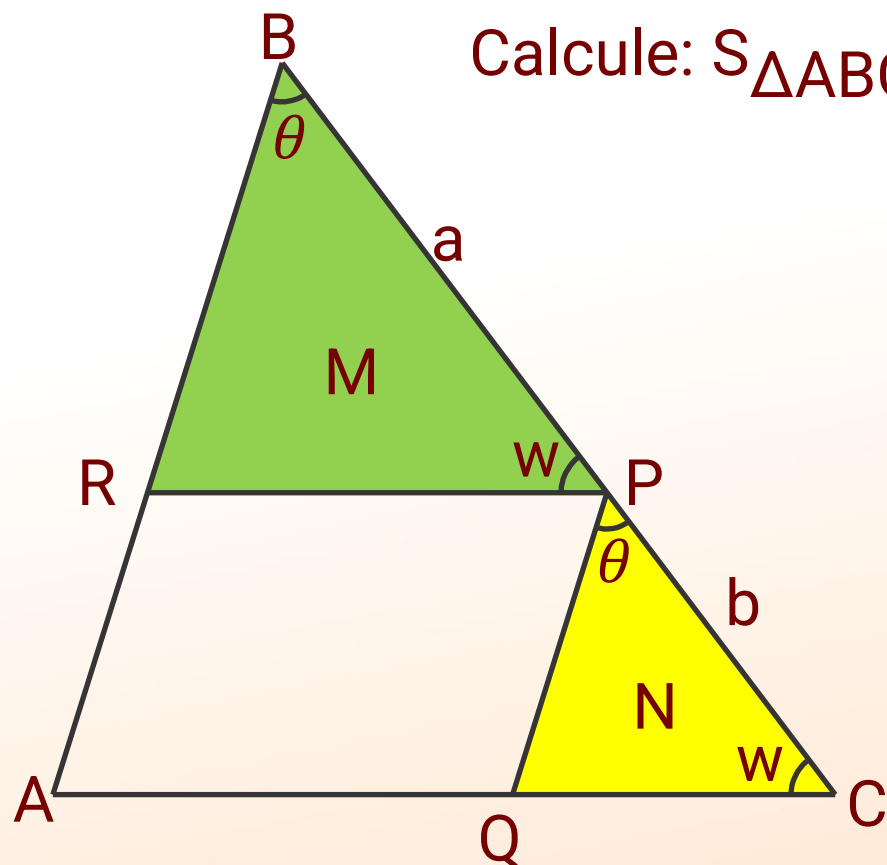
C) $\left(\frac{\sqrt{M} + \sqrt{N}}{2}\right)^2$

D) $\left(\frac{\sqrt{M} + \sqrt{N}}{3}\right)^2$

E) $\left(\frac{\sqrt{M} + \sqrt{N}}{4}\right)^2$

RESOLUCIÓN 06

Sea el triángulo ABC, los puntos R, P y Q pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{PQ}$ son paralelos a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si las áreas de las regiones triangulares RBP y QPC son M y N, entonces el área de la región triangular ABC es



Calcule: $S_{\Delta ABC}$ $\Delta RBP \sim \Delta ABC$

$$\frac{M}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \rightarrow \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \frac{a}{a+b} \dots (I)$$

$\Delta QPC \sim \Delta ABC$

$$\frac{N}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \rightarrow \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \frac{b}{a+b} \dots (II)$$

De (I) + (II):

$$S_{\Delta ABC} = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2$$

Clave: E



ce
pre
UNI

MATERIAL DE ESTUDIO

Geometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

**CICLO
PRE
2024-1**



PROBLEMA 258

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si $AB = 8$ cm y $BC = 15$ cm, entonces el área (en cm^2) de la región triangular MNC es

A) $\frac{400}{11}$
D) $\frac{580}{19}$

B) $\frac{500}{79}$
E) $\frac{600}{13}$

C) $\frac{576}{17}$

PROBLEMA 259

En un triángulo ABC, se trazan la mediana $\overline{AE}$ y la ceviana $\overline{BD}$, las cuales se intersecan en el punto R. Si $AD = 3(DC)$, entonces la razón de las áreas de las regiones triangulares EBR y ABR es

A) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{4}$

PROBLEMA 261

Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia, el punto P pertenece al arco menor $\widehat{BC}$. Si $BP = a$ y $PC = b$, entonces la razón de áreas de las regiones triangulares BPA y APC es

A) $\frac{a+b}{b}$

D) $\frac{a}{a+2b}$

B) $\frac{a}{b}$

E) $\frac{b}{a+3b}$

C) $\frac{a}{a+b}$

PROBLEMA 262

En un triángulo ABC, el ángulo ABC mide 120° , la bisectriz exterior $\overline{CE}$ y la prolongación de la bisectriz $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en P tal que la diferencia de las áreas de las regiones triangulares APE y CPD es igual a 12 u^2 . ¿Cuál es el área (en u^2) de la región triangular APC?

- A) 4
- D) 9

- B) 6
- E) 12

- C) 8

PROBLEMA 263

En un triángulo ABC de incentro I , en $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q tal que $\overline{PI} \parallel \overline{AB}$, $\overline{IQ} \parallel \overline{BC}$, $AB + BC = 2(AC)$ y el área de la región triangular ABC es 36 u^2 . Calcule el área (en u^2) de la región triangular PIQ .

A) 4

B) 6

C) 9

D) 12

E) 18

PROBLEMA 264

Sea la circunferencia de centro O inscrita en el triángulo ABC los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que $\overline{PQ}$ es tangente y paralelo a $\overline{AC}$. Si $AB = 30$ u, $BC = 14$ u y $AC = 40$ u, entonces, el área (en u^2) de la región triangular PBQ es

A) $2/21$

D) $8/21$

B) $4/21$

E) $10/21$

C) $5/21$

PROBLEMA 265

En un triángulo ABC recto en B de incentro I, las rectas $\bar{AI}$ y $\bar{CI}$ intersecan a la circunferencia circunscrita en los puntos P y Q. Calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares PBQ y AIC.

- A) $1/4$
D) $2/3$

- B) $1/3$
E) $\sqrt{2}/2$

- C) $1/2$

PROBLEMA 269

En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$. Si $AC = b$, $PQ = a$ y el área de la región triangular es S , entonces el área de la región PBQ es

A) $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)S$

B) $\left(\frac{a}{b}\right)S$

C) $\left(\frac{ab}{a+b}\right)S$

D) $\left(\frac{b^2+a^2}{ab}\right)S$

E) $\sqrt{ab}S$